



# Bersepeda

**MODUL TEMA 10**

**MATEMATIKA PEMINATAN  
PAKET C SETARA SMA/MA  
KELAS XI**



Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan  
Direktorat Jenderal Pendidikan Anak Usia Dini dan Pendidikan Masyarakat  
Direktorat Pembinaan Pendidikan Keaksaraan dan Kesetaraan  
Tahun 2018



# Bersepeda

MATEMATIKA PEMINATAN  
PAKET C SETARA SMA/MA  
KELAS XI

**MODUL TEMA 10**



Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan  
Direktorat Jenderal Pendidikan Anak Usia Dini dan Pendidikan Masyarakat  
Direktorat Pembinaan Pendidikan Keaksaraan dan Kesetaraan  
Tahun 2018

Matematika Peminatan Paket C - Setara SMA/MA kelas XI  
Modul Tema 10 : Bersepeda

■ **Penulis:** Pasimin, S.Pd., M.Pd.

■ **Diterbitkan oleh:** Direktorat Pembinaan Pendidikan Keaksaraan dan Kesetaraan-  
Ditjen Pendidikan Anak Usia Dini dan Pendidikan Masyarakat-Kementerian Pendidikan dan  
Kebudayaan, 2018

iv+ 36 hlm + ilustrasi + foto; 21 x 28,5 cm

## Kata Pengantar

Pendidikan kesetaraan sebagai pendidikan alternatif memberikan layanan kepada masyarakat yang karena kondisi geografis, sosial budaya, ekonomi dan psikologis tidak berkesempatan mengikuti pendidikan dasar dan menengah di jalur pendidikan formal. Kurikulum pendidikan kesetaraan dikembangkan mengacu pada kurikulum 2013 pendidikan dasar dan menengah hasil revisi berdasarkan peraturan Mendikbud No.24 tahun 2016. Proses adaptasi kurikulum 2013 ke dalam kurikulum pendidikan kesetaraan adalah melalui proses kontekstualisasi dan fungsionalisasi dari masing-masing kompetensi dasar, sehingga peserta didik memahami makna dari setiap kompetensi yang dipelajari.

Pembelajaran pendidikan kesetaraan menggunakan prinsip flexible learning sesuai dengan karakteristik peserta didik kesetaraan. Penerapan prinsip pembelajaran tersebut menggunakan sistem pembelajaran modular dimana peserta didik memiliki kebebasan dalam penyelesaian tiap modul yang di sajikan. Konsekuensi dari sistem tersebut adalah perlunya disusun modul pembelajaran pendidikan kesetaraan yang memungkinkan peserta didik untuk belajar dan melakukan evaluasi ketuntasan secara mandiri.

Tahun 2017 Direktorat Pembinaan Pendidikan Keaksaraan dan Kesetaraan, Direktorat Jendral Pendidikan Anak Usia Dini dan Pendidikan Masyarakat mengembangkan modul pembelajaran pendidikan kesetaraan dengan melibatkan Pusat Kurikulum dan Perbukuan Kemdikbud, para akademisi, pamong belajar, guru dan tutor pendidikan kesetaraan. Modul pendidikan kesetaraan disediakan mulai paket A tingkat kompetensi 2 (kelas 4 Paket A). Sedangkan untuk peserta didik Paket A usia sekolah, modul tingkat kompetensi 1 (Paket A setara SD kelas 1-3) menggunakan buku pelajaran Sekolah Dasar kelas 1-3, karena mereka masih memerlukan banyak bimbingan guru/tutor dan belum bisa belajar secara mandiri.

Kami mengucapkan terimakasih atas partisipasi dari Pusat Kurikulum dan Perbukuan Kemdikbud, para akademisi, pamong belajar, guru, tutor pendidikan kesetaraan dan semua pihak yang telah berpartisipasi dalam penyusunan modul ini.

Jakarta, Desember 2018  
Direktur Jenderal

Harris Iskandar

**Modul Dinamis:** Modul ini merupakan salah satu contoh bahan ajar pendidikan kesetaraan yang berbasis pada kompetensi inti dan kompetensi dasar dan didesain sesuai kurikulum 2013. Sehingga modul ini merupakan dokumen yang bersifat dinamis dan terbuka lebar sesuai dengan kebutuhan dan kondisi daerah masing-masing, namun merujuk pada tercapainya standar kompetensi dasar.

Daftar Isi

Judul .....I

Kata Pengantar .....iii

Daftar Isi .....iv

A. Petunjuk Penggunaan Modul dan Kriteria Ketuntasan Pembelajaran .....1

B. Tujuan Pembelajaran Modul .....3

C. Pengantar Modul .....4

Subtema 1. GIR SEPEDA .....5

1. Uraian Materi .....5

    a. Definisi Kedudukan Dua Lingkaran .....6

    b. Jarak Titik Pusat Terhadap Titik Pusat Lingkaran Lainnya.....6

    c. Kriteria Kedudukan Dua Lingkaran .....7

    d. Cara Menentukan Kedudukan Dua Lingkaran .....9

2. Penugasan ..... 12

Subtema 2. SEPEDA LIPAT ..... 14

1. Uraian Materi ..... 14

    a. Keliling Irisan Dua Lingkaran ..... 14

    b. Luas Irisan Dua Lingkaran ..... 19

2. Penugasan ..... 22

D. Rangkuman ..... 27

E. Saran Referensi ..... 29

F. Soal Latihan ..... 30

G. Kriteria Pindah Modul ..... 32

H. Kunci Jawaban dan Pembahasan ..... 33

H. Penilaian (Rubrik/Kriteria penilaian) ..... 34

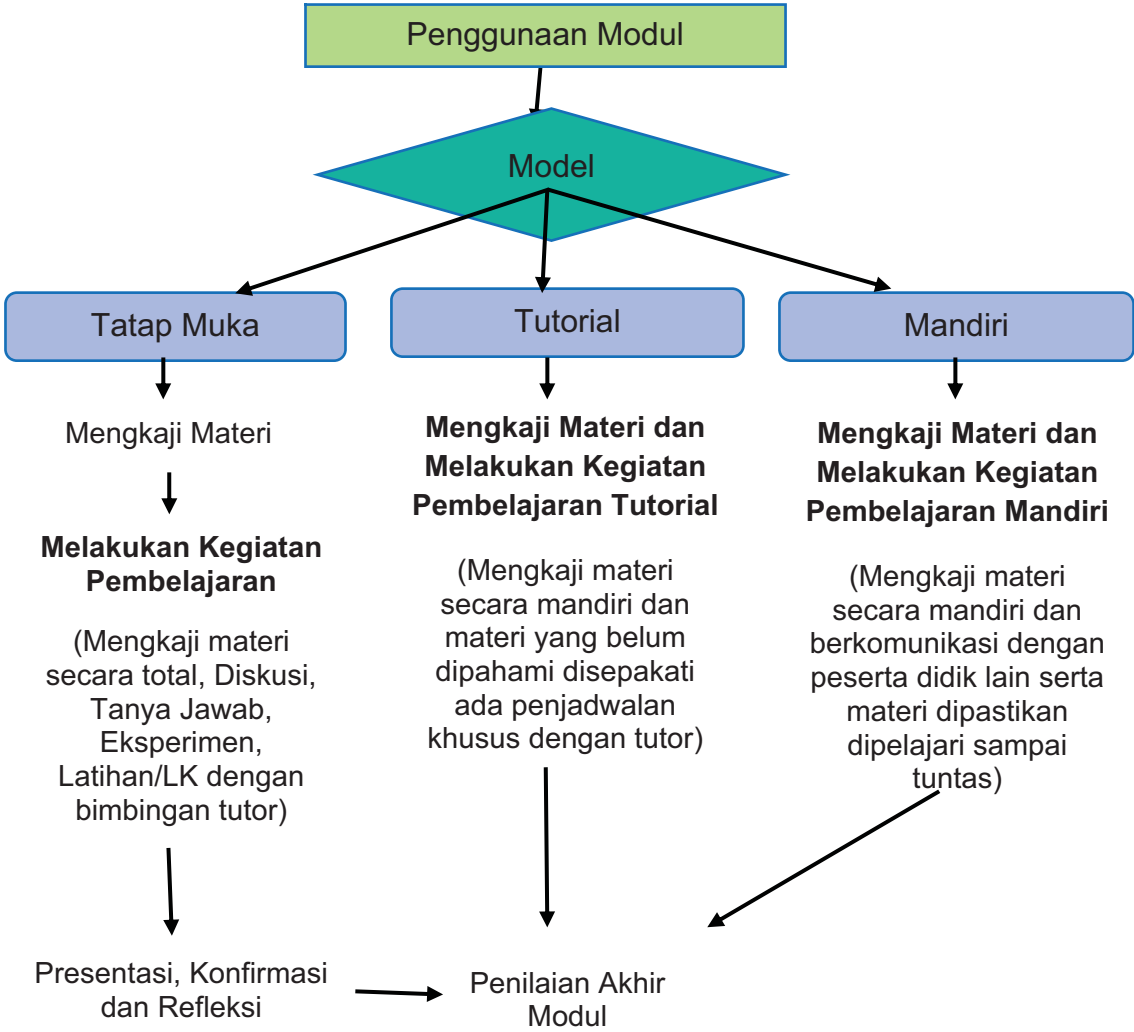
Daftar Pustaka ..... 35

BERSEPEDA

A. Petunjuk Penggunaan Modul dan Kriteria Ketuntasan Pembelajaran

1. Petunjuk Penggunaan Modul

Secara umum, petunjuk penggunaan modul pada setiap kegiatan pembelajaran disesuaikan dengan langkah-langkah kegiatan pada setiap penyajian modul. Modul ini dapat digunakan dalam kegiatan pembelajaran oleh peserta didik, baik dilaksanakan dengan model tatap muka, model tutorial, maupun model belajar mandiri. Berikut ini alur petunjuk penggunaan modul secara umum dapat dilihat pada bagian di bawah ini.



Gambar 1.1.  
Alur Model Kegiatan Pembelajaran

### a. Kegiatan Pembelajaran Tatap Muka

Pembelajaran tatap muka merupakan seperangkat tindakan yang dirancang untuk mendukung proses belajar peserta didik secara tatap muka, sedangkan kegiatan tatap muka adalah kegiatan pembelajaran yang di dalamnya terjadi proses interaksi antara peserta didik dan pendidik/tutor. Metode yang sering digunakan dalam kegiatan pembelajaran seperti metode diskusi, tanya jawab, demonstrasi, eksperimen dan lainnya.

### b. Kegiatan Pembelajaran Tutorial

Pembelajaran tutorial yang dimaksud dalam kegiatan ini adalah dimana pembelajaran dilakukan secara mandiri untuk materi-materi yang dapat dengan mudah dipahami oleh peserta didik, sedangkan materi-materi yang dianggap sulit untuk dipahami atau dipelajari maka dilakukan dengan tatap muka. Dalam pembelajaran metode tutorial ini diberikan dengan bantuan tutor. Setelah peserta didik diberikan bahan kajian materi pembelajaran, kemudian peserta didik diminta untuk mempelajari kajian materi yang ada dalam modul. Pada bagian kajian materi yang dirasa sulit, peserta didik dapat bertanya pada tutor.

### c. Kegiatan Pembelajaran Mandiri

Kegiatan pembelajaran mandiri merupakan kegiatan pembelajaran yang didorong agar peserta didik mampu menguasai suatu kompetensi guna menyelesaikan suatu permasalahan. Pada kegiatan pembelajaran mandiri peserta didik diberikan kajian materi yang ada dalam modul untuk dipelajari dan diarahkan untuk memegang kendali dalam menemukan dan mengorganisir jawaban yang diharapkan. Penetapan kompetensi sebagai tujuan pembelajaran mandiri dan sampai pada cara pencapaian mulai dari penentuan waktu belajar, tempat belajar, sumber belajar lainnya maupun evaluasi modul dilakukan oleh peserta didik itu sendiri. Pada pembelajaran mandiri dipastikan dengan benar bahwa peserta didik melakukan kajian materi, melakukan tahapan kegiatan pembelajaran, tahapan penugasan/latihan, evaluasi, bahkan sampai pada tahap penilaian dilakukan oleh peserta didik itu sendiri.

## 2. Kriteria Ketuntasan Pembelajaran

Setelah seluruh materi dan setiap kompetensi dasar dipelajari dengan seksama maka cobalah untuk mengerjakan latihan soal yang disediakan, baik secara individu, kelompok maupun dengan bimbingan tutor. Semakin rajin peserta didik dalam mengerjakan soal penugasan, diharapkan semakin terampil dan cepat mengeneralisasikan setiap permasalahan baik yang disediakan dalam modul ataupun dalam kaitannya dengan permasalahan sehari-hari.

Pada tahap berikutnya, kerjakan soal-soal dalam latihan untuk mengukur penguasaan materi yang diperoleh dengan menggunakan rumus di bawah ini. Peserta didik dinyatakan tuntas belajar modul ini dan dapat melanjutkan ke modul selanjutnya setelah mencapai keberhasilan sebesar 80%.

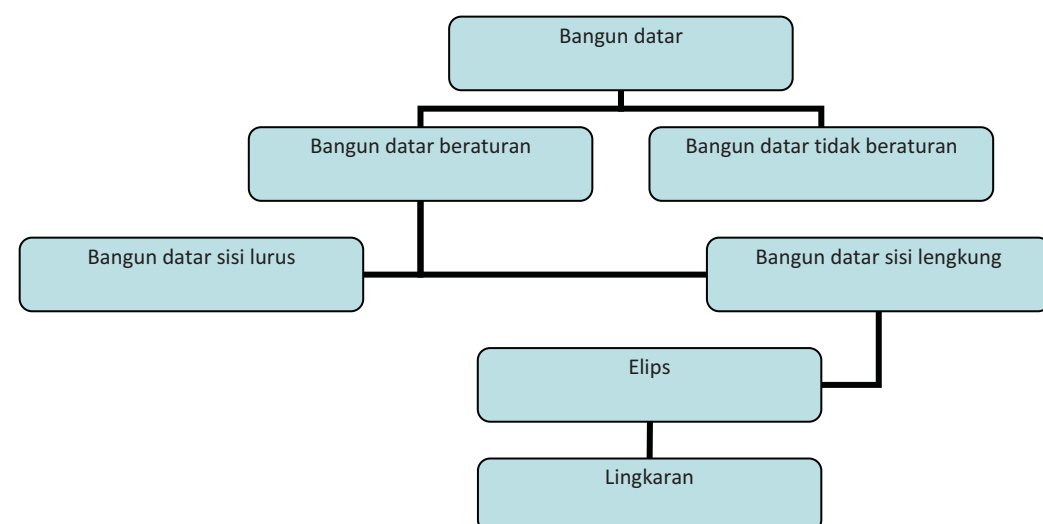
## B. Tujuan Pembelajaran Modul

Tujuan setelah mempelajari modul ini, diharapkan peserta didik memiliki kemampuan pengetahuan, dan ketrampilan tentang:

1. Menentukan hubungan dua lingkaran,
2. Menentukan kedudukan dua lingkaran,
3. Menentukan irisan dua lingkaran,
4. Menentukan keliling irisan dua lingkaran, dan
5. Menentukan luas irisan dua lingkaran.

### C. Pengantar Modul

Pembelajaran merupakan salah satu cara untuk mendapatkan kemampuan baik sikap, pengetahuan maupun keterampilan. Untuk menciptakan kegiatan pembelajaran baik melalui model tatap muka, tutorial maupun mandiri, maka salah satu alternatifnya adalah dengan menggunakan modul ini. Materi pada modul 10 ini adalah **Irisan Dua Lingkaran**. Materi pada modul ini disajikan dalam tema "**Bersepeda**" dan di dalamnya terdapat beberapa subtema yang berkaitan dalam kegiatan pembelajaran. Secara umum materi pembelajaran dalam modul ini membahas pemahaman tentang Irisan Dua Lingkaran. Modul ini memberikan gambaran uraian materi dengan penerapan dalam kehidupan sehari-hari atau bersifat kontekstual.



Dengan mempelajari modul ini, dimana materi dikaitkan dengan masalah kehidupan sehari-hari, maka diharapkan peserta didik mampu mengkaji, mencermati, mengolah, menjawab permasalahan atau soal-soal latihan yang dapat memberikan manfaat dalam kehidupan sehari-hari.

Materi disajikan dengan tema dan subtema yang berkaitan dengan permasalahan kehidupan sehari-hari dimaksudkan agar peserta didik lebih tertarik dan memahami bahwa mempelajari irisan dua lingkaran sangat penting dan bermanfaat dalam kehidupan sehari-hari. Dengan mempelajari modul ini, sudah tentu memberikan gambaran betapa pentingnya belajar, karena dengan belajar, peserta didik mampu menghadapi dan menyelesaikan permasalahan yang dihadapi dalam dunia nyata, sehingga jelas bahwa dengan mempelajari materi ini memberikan manfaat dalam menjalani kehidupan sehari-hari.

## SUBTEMA 1. GIR SEPEDA

Masih ingatkah kalian mengenai benda yang berbentuk lingkaran? Kali ini, kita akan membahas mengenai lingkaran. Lingkaran ini sangat penting dan berpengaruh pada kehidupan kita karena banyak benda-benda di sekitar kita yang berbentuk lingkaran. Materi ini pernah kita pelajari pada materi sebelumnya, akan tetapi akan lebih baik jika kita pelajari secara lebih mendalam lagi yaitu tentang kedudukan dua lingkaran. Pertama, mari ingat kembali mengenai definisi lingkaran yang kita pelajari pada materi sebelumnya. Apa definisi lingkaran itu? Lingkaran adalah tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama terhadap sebuah titik tetap yang dinamakan dengan jari-jari lingkaran.

### 1. Uraian Materi

Perhatikan saat kalian memperbaiki sepeda di bengkel, lalu perhatikan rodanya, roda tersebut berbentuk lingkaran. Hubungan roda belakang dengan roda depan, roda belakang dengan gir belakang, dan roda belakang dengan gir depan. Dari roda sepeda tersebut dapat kita gunakan untuk mempelajari tentang materi kedudukan dua lingkaran.



Sumber:  
(1) [https://cdn.pixabay.com/photo/2013/07/13/10/22/mountain-bike-157085\\_960\\_720.png](https://cdn.pixabay.com/photo/2013/07/13/10/22/mountain-bike-157085_960_720.png)  
(2) <https://jiri14021994.wordpress.com>  
(3) <https://i0.wp.com/kaaffah.xyz/wp-content/uploads/2016/01/roda.gif>

Gambar 1.2  
Contoh Penggunaan Lingkaran dalam Kehidupan Sehari-hari

Gambar di atas adalah beberapa contoh penerapan ilmu lingkaran dalam kehidupan sehari-hari, antara lain:

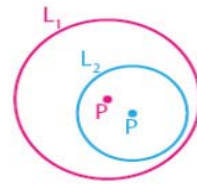
- (1) Gambar sepeda
- (2) Hubungan lingkaran besar dengan lingkaran kecil (lingkaran bagian dalam)
- (3) Dua cincin yang saling berpotongan

Mari kita pelajari materi kedudukan dua lingkaran.

#### a. Definisi Kedudukan Dua Lingkaran

Kedudukan antara dua lingkaran atau kedudukan dua lingkaran menunjukkan posisi antara lingkaran pertama dan lingkaran kedua. Posisi tersebut dapat berupa lingkaran di dalam lingkaran, kedua lingkaran bersinggungan di dalam lingkaran, kedua lingkaran berpotongan di dua titik, kedua lingkaran bersinggungan di luar lingkaran, atau kedua lingkaran saling lepas (tidak memiliki titik potong).

Untuk lebih mudah bagaimana menentukan posisi lingkaran pertama terhadap lingkaran kedua, perhatikan gambar di bawah ini!



Gambar 1.3.  
Posisi Dua Lingkaran

Berdasarkan gambar di atas dapat dilihat bahwa posisi lingkaran ke dua berada di dalam lingkaran pertama. Namun, bagaimana jika yang diketahui hanya persamaan kedua lingkaran? Kedudukan dua lingkaran yang persamaannya diketahui dapat digambarkan melalui bidang koordinat dengan menentukan pusat lingkaran dan jari-jari kedua lingkaran. Sebelum itu, mari kita ingat kembali rumus mengenai jarak antara dua titik.

#### b. Jarak Titik Pusat Lingkaran ke Titik Pusat Lingkaran

Misal  $P_1 = (x_1, y_1)$  adalah titik pusat lingkaran 1 dan  $P_2 = (x_2, y_2)$  adalah titik pusat lingkaran 2 maka jarak titik pusat lingkaran ke titik pusat lingkaran lainnya adalah

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

#### c. Kriteria Kedudukan Antara Dua Lingkaran

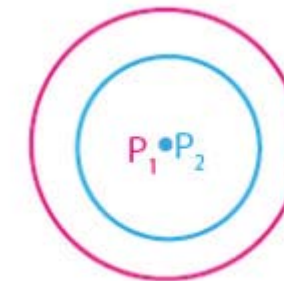
Diketahui dua buah lingkaran:

- 1) Lingkaran 1
  - Pusat:  $P_1$
  - Jari-jari: R
- 2) Lingkaran 2
  - Pusat:  $P_2$
  - Jari-jari: r

Kriteria kedudukan antara dua lingkaran adalah sebagai berikut :

- 1) Memiliki pusat yang sama

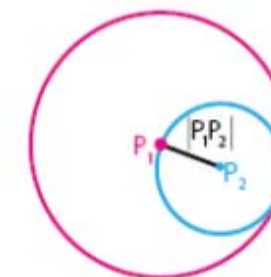
Jika  $P_1$  dan  $P_2$  berimpit, ciri-ciri lingkaran sepusat/konsentris ini dimana panjang  $P_1P_2$  atau jarak titik  $P_1$  dan  $P_2$  adalah 0 atau bisa ditulis  $P_1P_2 = 0$



Gambar 1.4.  
Dua Lingkaran yang Memiliki Pusat Lingkaran yang Sama

- 2) Bersinggungan di dalam lingkaran tetapi tidak sepusat

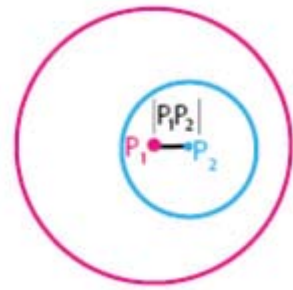
Jari-jari lingkaran lebih besar adalah R dan jari-jari lingkaran lebih kecil r sehingga  $R > r$ .



Gambar 1.5.  
Dua Lingkaran yang Bersinggungan

3) Lingkaran kecil terletak di dalam lingkaran besar

Ciri-ciri atau kondisi dua lingkaran berada dalam satu lingkaran tetapi tidak sepusat ini adalah  $P_1P_2 < r < R$  atau bisa ditulis lebih sederhana  $P_1P_2 < R-r$ .



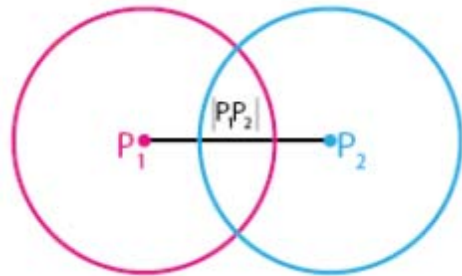
Gambar 1.6.

Lingkaran Kecil di Dalam Lingkaran Besar

4) Berpotongan di dua titik

Syarat atau ciri-ciri dua lingkaran yang berpotongan ini adalah:

$R - r < P_1P_2 < R + r$ , R dan r adalah jari-jari dari kedua lingkaran

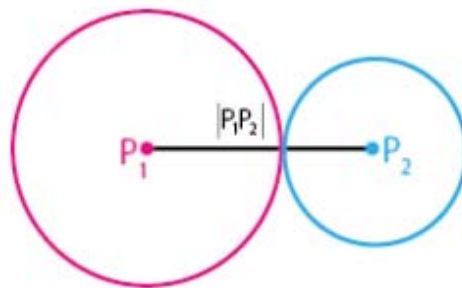


Gambar 1.7.

Dua Lingkaran yang Berpotongan di Dua

5) Bersinggungan di luar lingkaran (berpotongan di satu titik)

Syarat atau ciri-ciri lingkaran yang bersinggungan luar adalah:  $P_1P_2 = R+r$ .

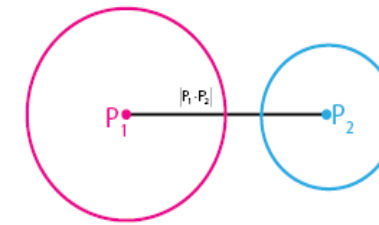


Gambar 1.8

Dua Lingkaran yang Berpotongan di Luar

6) Tidak Bersinggungan (Saling Lepas)

Kondisi ini adalah dimana antara 2 lingkaran tidak berpotongan ataupun bersinggungan. Syarat atau ciri-ciri lingkaran yang saling lepas ini  $P_1P_2 > R+r$ .



Gambar 1.9.

Dua Lingkaran yang Berpotongan di Luar

Keterangan:

$|P_1P_2|$  adalah jarak antara kedua pusat lingkaran. Gunakan rumus jarak antara dua titik untuk menghitung jarak kedua pusat lingkaran.

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

d. Cara Menentukan Kedudukan (Posisi) Dua Lingkaran

Misalkan lingkaran pertama  $L_1$  dengan pusat di P1 dan jari-jari R; Lalu ada lingkaran  $L_2$  dengan pusat di P2 dan jari-jari r. Andaikan  $R > r$ , maka antara kedua lingkaran tersebut ada kemungkinan :

1) Lingkaran 2 berada dalam Lingkaran 1 dan Sepusat

Titik  $P_1$  dan titik  $P_2$  berimpit. Ciri ciri lingkaran sepusat ini dimana Panjang  $P_1P_2$  atau jarak titik  $P_1$  dan  $P_2$  adalah 0 atau bisa ditulis  $P_1P_2 = 0$ .

2) Lingkaran 2 berada dalam Lingkaran 1 tetapi tidak Sepusat.

Ciri-ciri atau kondisi lingkaran 2 berada dalam lingkaran 1 tetapi tidak sepusat ini adalah  $P_1P_2 < r < R$  atau bisa ditulis lebih sederhana  $P_1P_2 < R-r$ . Jenis kondisi lingkaran ini dinamakan juga dengan tidak konsentris (konsentris= concentric= con; sama; centric; pusat).

3) Lingkaran yang Bersinggungan Dalam

Syarat lingkaran bersinggungan dalam adalah  $P_1P_2 = R-r$ .

4) Lingkaran Berpotongan di Dua Titik

Syarat dua lingkaran yang berpotongan ini adalah  $R - r < P_1P_2 < R + r$

5) Lingkaran Bersinggungan Luar

Syarat atau ciri-ciri lingkaran yang bersinggungan luar adalah:  $P_1P_2 = R+r$ .

## 6) Lingkaran Saling Lepas

Kondisi ini adalah dimana antara dua lingkaran tidak berpotongan ataupun bersinggungan. Syarat atau ciri-ciri lingkaran yang saling lepas ini  $P_1P_2 > R+r$ .

Untuk menentukan kedudukan dua lingkaran ini, perlu ditentukan jari-jari dan titik pusat dari kedua lingkaran sehingga dapat dihitung jarak antara dua pusat lingkaran.

### Contoh Soal 1.

Tentukan kedudukan lingkaran  $L_1: (x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$  terhadap  $L_2: (x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$  !

#### Pembahasan:

1) Tentukan jari-jari dan pusat masing-masing lingkaran.

$$L_1: (x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$$

$$\text{Jari-jari: } r^2 = 25 \rightarrow r = \sqrt{25} \rightarrow r = 5$$

$$\text{Pusat lingkaran: } P(a,b) = P(1,-3)$$

$$L_2: (x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$$

$$\text{Jari-jari: } r^2 = 9 \rightarrow r = \sqrt{9} \rightarrow r = 3$$

$$\text{Pusat lingkaran: } Q(a,b) = Q(-2,1)$$

artinya  $R = 5$  dan  $r = 3$ .

2) Jarak antara pusat.

Disini kita gunakan menghitung jarak antara dua titik (pusat lingkaran). Titik tersebut  $(1,-3)$  dan  $(-2,1)$ .

$$PQ = \sqrt{(-2-1)^2 + (1-(-3))^2}$$

$$PQ = \sqrt{9+16}$$

$$PQ = \sqrt{25}$$

$$PQ = 5$$

3) Sekarang kita sesuaikan dengan mana dari 6 kondisi di atas yang memenuhi.

Silakan coba masing-masing kondisi tersebut. Pada hasil akhirnya ini akan memenuhi kondisi:

$$R-r < P_1P_2 < R+r$$

Oleh sebab demikian kedudukan 2 lingkaran ini adalah saling berpotongan.

### Contoh Soal 2.

Bagaimanakah kedudukan lingkaran  $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 15 = 0$  dan lingkaran

$$x^2 + y^2 - 8x - 4y + 15 = 0$$

#### Pembahasan:

1) Tentukan jari-jari dan pusat masing-masing lingkaran.

Koordinat pusat dan jari-jari lingkaran  $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 15 = 0$

$$\text{Pusat } P = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$$

$$= \left(-\frac{4}{2}, -\frac{2}{2}\right)$$

$$= (-2, -1)$$

$$\text{Jari-jari } r_1 = R = \sqrt{\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C}$$

$$R = \sqrt{\frac{4^2}{4} + \frac{2^2}{4} - (-15)}$$

$$R = \sqrt{4+1+15} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Koordinat pusat dan jari-jari lingkaran  $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 15 = 0$

$$\text{Pusat } P = \left(-\frac{(-8)}{2}, -\frac{(-4)}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{8}{2}, \frac{4}{2}\right)$$

$$= (4, 2)$$

$$\text{Jari-jari } r_2 = R = \sqrt{\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C}$$

$$R = \sqrt{\frac{(-8)^2}{4} + \frac{(-4)^2}{4} - 15}$$

$$R = \sqrt{\frac{64}{4} + \frac{16}{4} - 15}$$

$$R = \sqrt{16+4-15} = \sqrt{5}$$

2) Jarak antara pusat.

Jarak antara dua titik (pusat lingkaran). Titik tersebut  $(-2,-1)$  dan  $(4,2)$ .

Jarak kedua pusat lingkaran :

$$P_1P_2 = \sqrt{(4-(-2))^2 + (2-(-1))^2}$$

$$= \sqrt{6^2 + 3^2}$$

$$= \sqrt{36+9}$$

$$= \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$\text{Karena } R + r = 2\sqrt{5} + \sqrt{5} = 3\sqrt{5} = P_1P_2$$

Jadi, kedua lingkaran itu bersinggungan di luar.

## 2. Penugasan

Pada subtema 1. “Gir Sepeda”, meliputi beberapa kajian materi:

### a. Tujuan

Pembelajaran ini memiliki tujuan penugasan agar peserta didik dapat:

- 1) Menentukan jarak titik pusat lingkaran yang satu dengan lainnya dan menentukan kriteria kedudukan dua lingkaran
- 2) Menentukan kedudukan dua lingkaran

### b. Media, Alat, Bahan, dan Sumber Belajar Lainnya

Alat dan Bahan yang digunakan:

- 1) Lingkungan sekitar (masyarakat)
- 2) Kertas grafik (buku kotak kecil)
- 3) Buku, internet, koran, majalah, dll
- 4) Penggaris, alat tulis

### c. Langkah-Langkah Kegiatan

**Kegiatan 1.1. Menentukan jarak titik pusat lingkaran yang satu dengan lainnya dan menentukan kriteria kedudukan dua lingkaran**

Untuk mengetahui bagaimana menentukan jarak titik pusat lingkaran yang satu dengan lainnya dan menentukan kriteria kedudukan dua lingkaran, pelajari dan kaji permasalahan berikut ini.

#### Masalah 1.1.

Menentukan jarak titik pusat lingkaran yang satu dengan lainnya dan menentukan kriteria kedudukan dua lingkaran

Amatilah roda sepeda, ukurlah jari-jarinya. Tentukan jarak dua lingkaran tersebut!

#### Alternatif Jawaban

Untuk dapat mengerjakan penugasan tersebut, peserta didik harus :

1. Mengamati sebuah sepeda
2. Mengukur panjang jari-jari roda depan dan roda belakang
3. Menentukan jarak kedua roda tersebut

#### Kegiatan 1.2. Menentukan Kedudukan dua lingkaran

Untuk mengetahui bagaimana menentukan kedudukan dua lingkaran, pelajari dan kaji permasalahan berikut ini.

#### Masalah 1.2.

##### Menentukan Kedudukan Dua Lingkaran

Diskusikan kegiatan ini bersama teman kalian.

1. Tentukan kedudukan dua lingkaran berikut :  
 $L_1: x^2 + y^2 - 10x + 2y + 17 = 0$  dan  $L_2: x^2 + y^2 + 8x - 22y - 7 = 0$
2. Bagaimana kedudukan dua lingkaran berikut:  $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 1 = 0$  terhadap lingkaran  $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 7 = 0$

#### Alternatif jawaban

Untuk dapat mengerjakan penugasan tersebut, peserta didik harus :

1. Membaca, mencermati, dan memahami uraian materi dan rumus-rumus kedudukan dua lingkaran.
2. Gunakan langkah-langkah penyelesaiannya
3. Mulai mengerjakan sesuai dengan langkah-langkah yang tepat.

## SUBTEMA 2. SEPEDA LIPAT

### 1. Uraian Materi

Matematika merupakan ilmu yang sangat berperan dalam bidang apapun. Seperti halnya pada materi lingkaran ini, banyak sekali benda-benda di sekeliling kita yang berbentuk lingkaran dan penggunaannya pun bervariasi. Perhatikan gambar sepeda lipat berikut.

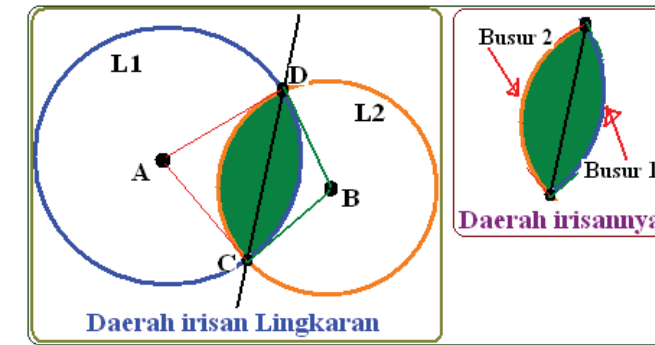


Perhatikan gambar (1) adalah gambar sebuah sepeda lipat sebelum dilipat, dan gambar (2) adalah gambar sepeda yang sudah dilipat. Pada gambar kedua, perhatikan rodanya, setelah dilipat ternyata kedua roda tersebut beririsan. Ini merupakan salah satu contoh penerapan materi irisan dua lingkaran. Nah, materi yang akan kita bahas ini adalah mengenai irisan dua lingkaran. Terbagi menjadi dua sub materi yaitu menghitung keliling irisan dua lingkaran dan menghitung luas irisan dua lingkaran. Untuk itu, pelajari dan pahami uraian materi berikut dengan baik.

#### a. Keliling Irisan Dua Lingkaran

Irisan dua lingkaran akan membentuk suatu daerah irisan. Daerah irisan akan terbentuk jika kedua lingkaran berpotongan di dua titik yang berbeda, silahkan baca materinya di "kedudukan dua lingkaran". Materi dasar yang harus dikuasai untuk mempermudah mempelajari **keliling dan luas irisan lingkaran** adalah "panjang busur dan luas juring" serta "aturan kosinus" untuk menentukan besar sudutnya, dan jarak antara dua titik, yang semua materi dasar ini bisa langsung kita pelajari di irisan dua lingkaran.

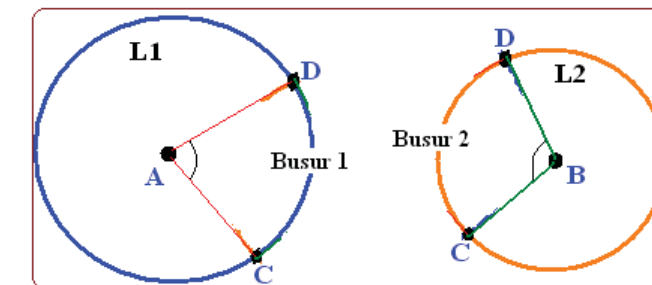
Perhatikan gambar irisan dua lingkaran berikut.



Sumber: <http://4.bp.blogspot.com>

Gambar 2.2.  
Irisan Dua Lingkaran

Dari gambar irisan di atas, daerah irisan dua lingkarannya adalah daerah arsiran berwarna hijau. Keliling daerah irisan yang dimaksud adalah jumlah busur lingkaran warna biru (busur 1) dan busur lingkaran berwarna orange (busur 2). Berikut busur masing-masing,



Sumber: <http://2.bp.blogspot.com>

Gambar 2.3.  
Irisan Dua Lingkaran yang Dipisah

#### 1) Menentukan keliling irisan dua lingkaran

Untuk menentukan keliling irisannya, kita harus menentukan panjang kedua busurnya, yaitu :

a). Busur 1 pada lingkaran pertama (L1):

$$\text{busur 1} = \frac{\angle CAD}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot r$$

b). Busur 2 pada lingkaran kedua (L2):

$$\text{busur 2} = \frac{\angle CBD}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot r$$

c). Sehingga keliling irisannya:

$$\text{Keliling irisan} = \text{busur 1} + \text{busur 2}.$$

$$\text{Keliling irisan} = \frac{\angle CAD}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot r + \frac{\angle CBD}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot r$$

2) **Menentukan besar sudut pusat lingkaran**

Untuk menentukan besarnya sudut pusat lingkaran dari masing-masing busur, kita menggunakan aturan kosinus. Misalkan besar sudut CAD pada busur pertama, besar sudutnya :

$$\cos \angle CAD = \frac{AD^2 + AC^2 - CD^2}{2 \cdot AD \cdot AC} = \frac{r^2 + r^2 - CD^2}{2r^2}$$

$$\cos \angle CAD = \frac{2r^2 - CD^2}{2r^2}$$

3) **Menentukan panjang garis antara titik potong kedua lingkaran**

Garis CD adalah garis yang dibentuk dari kedua titik potong lingkaran. Sebelum menentukan jarak atau panjang CD, kita harus menentukan titik C dan D (titik potong kedua lingkaran) terlebih dahulu. Untuk menentukan panjang CD, kita gunakan konsep jarak antar dua titik, misalkan titik C ( $x_1, y_1$ ) dan D ( $x_2, y_2$ ), jarak atau panjang CD adalah :

$$CD = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Catatan:

Langkah-langkah umum dalam menentukan keliling irisan lingkaran adalah :

- 1). Menentukan titik potong kedua lingkaran.
- 2). Menentukan panjang garis titik potong kedua lingkaran,
- 3). Menentukan sudut pusat kedua busur lingkaran,
- 4). Menentukan panjang busur kedua lingkaran, dan
- 5). Jumlahkan kedua panjang busurnya.

**Contoh:**

Hitunglah keliling daerah Irisan Lingkaran persamaan berikut:

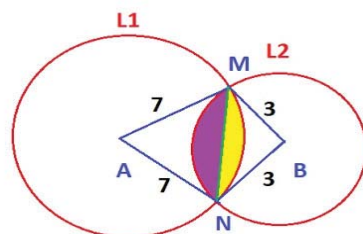
$$L1: (x+2)^2 + (y-1)^2 = 49 \text{ dan } L2: (x-6)^2 + (y-1)^2 = 9 !$$

Penyelesaian:

**Langkah 1:**

Menentukan jari-jari kedua lingkaran :

Berdasarkan persamaan lingkaran di atas, kita ketahui  $r_1 = 7$  dan  $r_2 = 3$ .



Sumber: <http://4.bp.blogspot.com>

Gambar 2.4.  
Jari-jari Dua Lingkaran

**Langkah 2:**

Menentukan titik potong lingkaran dan panjang garis MN pada gambar di atas.

$$L1: (x+2)^2 + (y-1)^2 = 49 \text{ dipecah menjadi } L1: x^2 + y^2 + 4x - 2y - 44 = 0$$

$$L2: (x-6)^2 + (y-1)^2 = 9 \text{ dipecah menjadi } L2: x^2 + y^2 - 12x - 2y + 28 = 0$$

Mencari titik potong.

Eliminasi kedua persamaan lingkaran:

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y - 44 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 12x - 2y + 28 = 0 \quad -$$

$$16x - 72 = 0$$

$$16x = 72$$

$$x = 4,5$$

$x = 4,5$  disubstitusikan ke salah satu persamaan lingkaran.

$$x = 4,5 \rightarrow (x-6)^2 + (y-1)^2 = 9$$

$$(4,5-6)^2 + (y-1)^2 = 9$$

$$2,25 + (y-1)^2 = 9$$

$$(y-1)^2 = 9 - 2,25$$

$$(y-1)^2 = 6,75$$

$$y - 1 = \pm \sqrt{6,75}$$

$$y = 1 \pm \sqrt{6,75}$$

$$\text{Jadi, } y_1 = 1 - \sqrt{6,75} \text{ atau } y_2 = 1 + \sqrt{6,75}$$

Sehingga titik potong kedua lingkaran: M ( $4,5 ; 1 - \sqrt{6,75}$ ) dan

$$N (4,5 ; 1 + \sqrt{6,75})$$

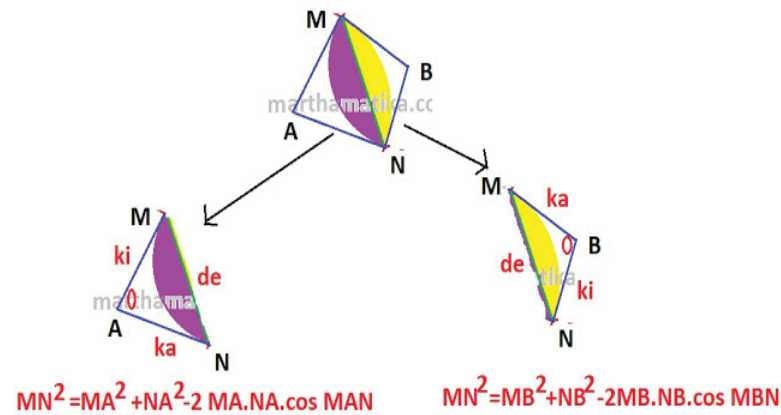
Panjang garis MN.

$$MN = \sqrt{(4,5 - 4,5)^2 + [(1 - \sqrt{6,75}) - (1 + \sqrt{6,75})]^2}$$

$$MN = 2 \sqrt{6,75}$$

### Langkah 3:

Menentukan sudut pusat ke dua lingkaran dengan aturan cosinus.



Sumber: <http://4.bp.blogspot.com>

Gambar 2.5.

Sudut Pusat Dua Lingkaran dengan Aturan Cosinus

Diperoleh :

Sudut MAN:

$$\cos \angle MAN = \frac{2r^2 - MN^2}{2r^2}$$

$$\cos \angle MAN = \frac{2 \cdot 7^2 - (2\sqrt{57})^2}{2 \cdot 7^2}$$

$$\cos \angle MAN = \frac{98 - 27}{98}$$

$$\cos \angle MAN = \frac{71}{98}$$

$$\angle MAN = \arccos \frac{71}{98}$$

$$\angle MAN = 43,57^\circ = 44^\circ$$

Busur 2 pada lingkaran kedua (L2):

Sudut MBN

$$\cos \angle MBN = \frac{2r^2 - MN^2}{2r^2}$$

$$\cos \angle MBN = \frac{2 \cdot 3^2 - (2\sqrt{57})^2}{2 \cdot 3^2}$$

$$\cos \angle MBN = \frac{18 - 27}{18}$$

$$\cos \angle MBN = \frac{-19}{18}$$

$$\cos \angle MBN = -\frac{1}{2}$$

$$\angle MBN = \arccos \left( -\frac{1}{2} \right)$$

$$\angle MBN = 120^\circ$$

### Langkah 4:

Menentukan panjang busur masing-masing:

Busur MN pada L1:

$$MN = \frac{\angle MAN}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot r$$

$$= \frac{44^\circ}{360^\circ} \cdot 2 \cdot \frac{22}{7} \cdot 7$$

$$= 5,38$$

Busur MN pada L2

$$MN = \frac{\angle MBN}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot r$$

$$= \frac{120^\circ}{360^\circ} \cdot 2 \cdot \frac{22}{7} \cdot 3$$

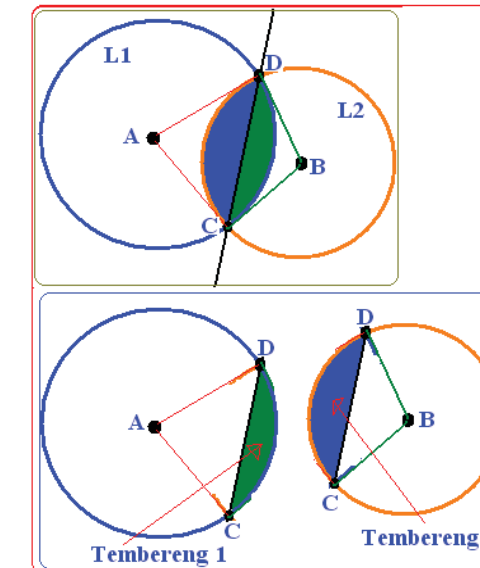
$$= 6,29$$

Jadi Keliling irisan lingkarannya adalah:

$$\text{Keliling} = \text{busur 1} + \text{busur 2} = 5,38 + 6,29 = 11,67$$

### b. Luas Irisan Dua Lingkaran

Perhatikan gambar irisan dua lingkaran berikut!



Sumber: <http://3.bp.blogspot.com>

Gambar 2.6.

Irisan Dua Lingkaran

Dari gambar irisan di atas, daerah irisan dua lingkarannya adalah daerah arsiran berwarna hijau dan warna biru. Ternyata daerah arsirannya adalah perpaduan dari dua tembereng yaitu tembereng 1 (dari lingkaran pertama) dan tembereng 2 (dari lingkaran kedua).

### 1) Menentukan luas irisan dua lingkaran

Untuk menentukan luas irisannya, kita harus menentukan luas kedua temberengnya. Luas tembereng diperoleh dari luas juring kurangi luas segitiganya.

a). Tembereng 1 pada lingkaran pertama (L1):

$$\text{Luas juring 1} = \frac{\angle CAD}{360^\circ} \cdot \pi \cdot r_1^2$$

$$\text{Luas segitiga CAD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AD \cdot \sin \angle CAD$$

Tembereng 1 = luas juring 1 – luas segitiga CAD.

b). Tembereng 1 pada lingkaran pertama (L1):

$$\text{Luas juring 2} = \frac{\angle CBD}{360^\circ} \cdot \pi \cdot r_2^2$$

$$\text{Luas segitiga CBD} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot BD \cdot \sin \angle CBD = \frac{1}{2} \cdot r_2^2 \cdot \sin \angle CBD$$

Tembereng 2 = luas juring 2 – luas segitiga CBD.

c). Sehingga luas irisannya:

**Luas irisan = tembereng 1 + tembereng 2.**

Catatan:

Langkah-langkah umum dalam menentukan luas irisan lingkaran :

- Menentukan titik potong kedua lingkaran.
- Menentukan panjang CD,
- Menentukan sudut kedua juring lingkaran,
- Menentukan luas juring, luas segitiga dan tembereng kedua lingkaran, dan
- Jumlahkan kedua luas tembereng.

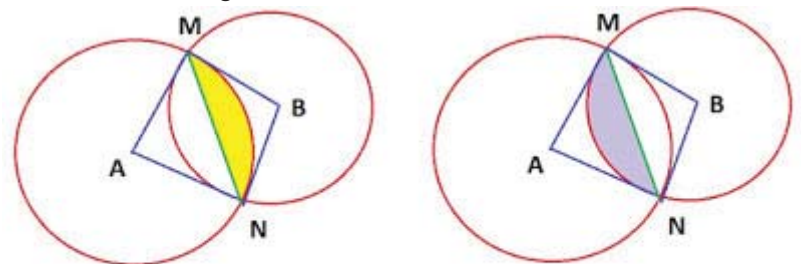
**Contoh :**

Hitunglah luas daerah Irisan Lingkaran dengan persamaan: L1:  $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 49$

dan L2:  $(x-6)^2 + (y-1)^2 = 9$  !

**Penyelesaian :**

Luas Irisan 2 Lingkaran



T1 = Juring AMN - Segitiga AMN

T2 = Juring BMN - Segitiga BMN

Sumber: <http://3.bp.blogspot.com>

$$\text{Juring AMN} = \frac{\angle MAN}{360^\circ} \cdot \pi \cdot r_1^2$$

$$\text{Juring AMN} = \frac{44^\circ}{360^\circ} \cdot \frac{22}{7} \cdot 7^2$$

$$\text{Juring AMN} = 18,82$$

$$\triangle AMN = \frac{1}{2} \cdot AM \cdot AN \cdot \sin \angle MAN$$

$$\triangle AMN = \frac{1}{2} \cdot 7^2 \cdot \sin 44^\circ$$

$$\triangle AMN = 17,02$$

$$\begin{aligned} \text{Tembereng 1 (kuning)} &= \text{Juring AMN} - \text{Segitiga AMN} \\ &= 18,82 - 17,02 = 1,8 \end{aligned}$$

$$\text{Juring MBN} = \frac{\angle MBN}{360^\circ} \cdot \pi \cdot r_2^2$$

$$\text{Juring MBN} = \frac{120^\circ}{360^\circ} \cdot \frac{22}{7} \cdot 3^2$$

$$\text{Juring MBN} = 9,43$$

$$\triangle MBN = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot BD \cdot \sin \angle CBD$$

$$\triangle MBN = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \sin 120^\circ$$

$$\triangle MBN = 3,89$$

$$\text{Tembereng 2 (ungu)} = \text{Juring MBN} - \text{segitiga MBN} = 9,43 - 3,89 = 5,54.$$

$$\text{Luas total} = \text{Tembereng 1 (kuning)} + \text{Tembereng 2 (ungu)}$$

$$\text{Jadi luas total} = 1,8 + 5,54 = 7,34$$

## 2. Penugasan

Pada subtema 2 "Sepeda Lipat", meliputi beberapa kajian materi:

### a. Tujuan

Tujuan penugasan pada pembelajaran ini adalah agar peserta didik mampu menghitung keliling dan luas daerah lingkaran yang beririsan.

### b. Media, Alat, Bahan, dan Sumber Belajar Lainnya

Alat dan Bahan yang digunakan:

- 1) Lingkungan sekitar (masyarakat)
- 2) Kertas grafik (buku kotak kecil)
- 3) Buku, internet, koran, majalah, dll
- 4) Penggaris, alat tulis

### c. Langkah-Langkah Kegiatan

Kegiatan 1.1. Menentukan Keliling Irisan Dua Lingkaran

Untuk mengetahui bagaimana menentukan keliling irisan dua lingkaran, pelajari dan kaji permasalahan berikut ini.

#### Masalah 1.1.

Menyelesaikan Keliling Irisan Dua Lingkaran

Diskusikan kegiatan ini bersama teman kalian.

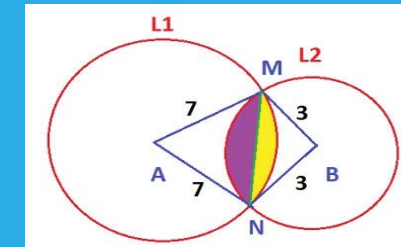
Tentukan keliling irisan dua lingkaran dengan persamaan lingkaran masing-masing  $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$  dan  $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 8$

## ALTERNATIF JAWABAN

### Langkah 1:

Menentukan jari-jari masing-masing lingkaran.

Berdasarkan persamaan lingkaran di atas, kita ketahui  $r_1 = 2$  dan  $r_2 = 2\sqrt{2}$ .



### Langkah 2:

Menentukan titik potong lingkaran dan panjang garis MN pada gambar di atas.

L1:  $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$  dipecah menjadi L1:  $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 9 = 0$

L2:  $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 8$  dipecah menjadi L2:  $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 3 = 0$

Cari titik potong.

Eliminasi kedua persamaan lingkaran:

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y - 9 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 3 = 0 \quad -$$

$$-4x - 6 = 0$$

$$-4x = \dots \rightarrow x = \dots$$

$x = \dots$  substitusi ke salah satu persamaan lingkaran.

$$x = \dots \rightarrow (x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$$

$$(\dots - 3)^2 + (y-2)^2 = 4$$

$$(\dots) + (y-2)^2 = 4$$

$$(y-2)^2 = 4 - (\dots)$$

$$(y-2)^2 = \dots$$

$$y - 2 = \pm \dots$$

$$y = 2 \pm \dots$$

$$y_1 = 2 - (\dots) \text{ atau } y_2 = 2 + (\dots)$$

Sehingga titik potong kedua lingkaran: M (....., ..... ) dan N (....., ..... )

Panjang garis MN

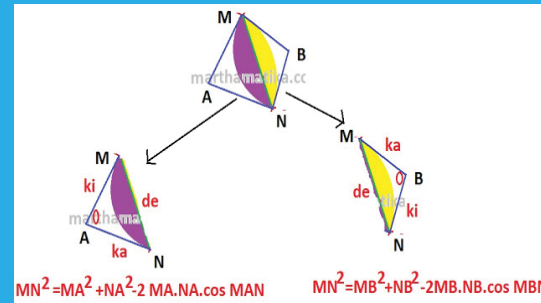
$$MN = \sqrt{(4,5 - 4,5)^2 + [(1 - \sqrt{6,75}) - (1 + \sqrt{6,75})]^2} = 2\sqrt{6,75}$$

Panjang garis MN

$$MN = \sqrt{(\dots - \dots)^2 + (\dots - \dots)^2} = \dots$$

### Langkah 3:

Menentukan sudut pusat ke dua lingkaran dengan aturan cosinus,



dan didapat:

Sudut MAN:

$$\cos \angle MAN = \frac{MA^2 + NA^2 - MN^2}{2 MA.NA} = \frac{2(\dots)^2 - (\dots)^2}{2(\dots)^2}$$

$$\cos \angle MAN = \frac{\dots}{\dots}$$

$$\cos \angle MAN = \frac{\dots}{\dots}$$

$$\angle MAN = \arccos \left( \frac{\dots}{\dots} \right)$$

$$\angle MAN = \dots^\circ$$

busur 2 pada lingkaran kedua (L2):

Sudut MBN

$$\cos \angle MBN = \frac{MB^2 + NB^2 - MN^2}{2 MB.NB} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$$

$$\cos \angle MBN = \frac{\dots}{\dots}$$

$$\angle MBN = \arccos (\dots)$$

$$\angle MBN = (\dots)^\circ$$

### Langkah 4:

Menentukan panjang busur masing-masing:

Busur MN pada L1:

$$MN = \frac{\angle MAN}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot r = \frac{(\dots)^\circ}{360^\circ} \cdot 2 \cdot \frac{22}{7} \cdot (\dots) = \dots$$

Busur MN pada L2

$$MN = \frac{\angle MBN}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot r = \frac{(\dots)^\circ}{360^\circ} \cdot 2 \cdot \frac{22}{7} \cdot (\dots) = \dots$$

Jadi keliling irisan lingkarannya adalah:

$$\text{Keliling} = \text{busur 1} + \text{busur 2} = \dots + \dots = \dots$$

## Kegiatan 1.2. Menentukan Luas Irisan Dua Lingkaran

Untuk mengetahui bagaimana menentukan luas irisan dua lingkaran, pelajari dan kaji permasalahan berikut ini.

### Masalah 1.2.

#### Menyelesaikan Luas Irisan Dua Lingkaran

Diskusikan kegiatan ini bersama teman kalian.

Tentukan luas irisan dua lingkaran dengan persamaan lingkaran masing-

$$\text{masing } (x-3)^2 + (y-2)^2 = 4 \text{ dan } (x-1)^2 + (y-2)^2 = 6$$

#### Alternatif Jawaban

Untuk lebih mempermudah kalian mengerjakan, ikuti dan isilah titik-titik berikut.

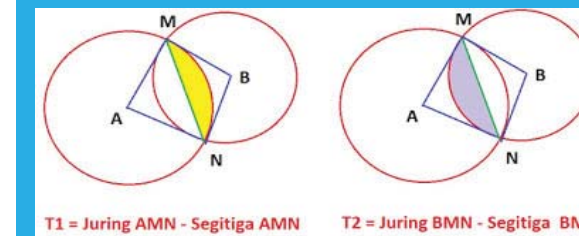
Persamaan lingkaran dan jari-jarinya

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4 \rightarrow r = \sqrt{4} = \dots \text{ (lingkaran kecil)}$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 6 \rightarrow R = \sqrt{6} = \dots \text{ (lingkaran besar)}$$

Penyelesaian:

Luas Irisan Dua Lingkaran



Sudut MAN:

$$\cos \angle MAN = \frac{MA^2 + NA^2 - MN^2}{2 MA.NA} \text{ (panjang MN sudah dicari pada keliling lingkaran)}$$

$$= \frac{2(\dots)^2 - (\dots)^2}{2(\dots)^2}$$

$$\cos \angle MAN = \frac{\dots}{\dots}$$

$$\cos \angle MAN = \frac{\dots}{\dots}$$

$$\angle MAN = \arccos \left( \frac{\dots}{\dots} \right)$$

$$\angle MAN = \dots^\circ$$

busur 2 pada lingkaran kedua (L2):

Sudut MBN

$$\cos \angle MBN = \frac{MB^2 + NB^2 - MN^2}{2 MB.NB} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$$

$$\text{Juring AMN} = \frac{\angle \text{MAN}}{360^\circ} \cdot \pi \cdot r_1^2$$

$$\text{Juring AMN} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{360^\circ}{\dots}}{360^\circ} \cdot \frac{360^\circ}{\dots} \cdot \left(\frac{\dots}{\dots}\right)^2$$

$$\text{Juring AMN} = \dots$$

$$\Delta \text{AMN} = \frac{1}{2} \cdot \text{AM} \cdot \text{AN} \cdot \sin \angle \text{MAN}$$

$$\Delta \text{AMN} = \frac{1}{2} \cdot (\dots)^2 \cdot \sin (\dots^\circ)$$

$$\Delta \text{AMN} = \dots$$

$$\text{Tembereng 1 (kuning)} = \text{Juring AMN} - \text{Segitiga AMN} = (\dots) - (\dots) = \dots$$

$$\text{Juring MBN} = \frac{\angle \text{MBN}}{360^\circ} \cdot \pi \cdot r_2^2$$

$$\text{Juring MBN} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{360^\circ}{\dots}}{360^\circ} \cdot \frac{360^\circ}{\dots} \cdot (\dots)^2$$

$$\text{Juring MBN} = \dots$$

$$\Delta \text{MBN} = \frac{1}{2} \cdot \text{BC} \cdot \text{BD} \cdot \sin \angle \text{CBD}$$

$$\cos \angle \text{MBN} = \frac{\dots}{\dots}$$

$$\angle \text{MBN} = \arccos (\dots)$$

$$\angle \text{MBN} = \left(\frac{\dots}{\dots}\right)^\circ$$

$$\Delta \text{MBN} = \frac{1}{2} \cdot (\dots) \cdot (\dots) \cdot \sin \left(\frac{\dots}{\dots}\right)^\circ$$

$$\Delta \text{MBN} = \dots$$

$$\text{Tembereng 2 (Ungu)} = \text{Juring MBN} - \text{segitiga MBN} = (\dots) - (\dots) = \dots$$

$$\text{Luas total} = \text{Tembereng 1 (kuning)} + \text{Tembereng 2 (Ungu)}$$

$$\text{Jadi Luas total} = (\dots) + (\dots) = \dots$$

## D. Rangkuman

Lingkaran L1 dengan pusat di P dan jari-jari R; lalu ada lingkaran L2 dengan pusat di Q dan jari-jari r. Andaikan  $R > r$ , maka antara kedua lingkaran tersebut ada kemungkinan hubungan sebagai berikut:

### 1. Lingkaran 2 berada dalam Lingkaran 1 dan Sepusat

Titik P dan titik Q berimpit. Ciri-ciri lingkaran sepusat ini dimana panjang PQ/ jarak titik P dan Q adalah 0 atau bisa ditulis  $PQ=0$ .

### 2. Lingkaran 2 berada dalam Lingkaran 1 tetapi tidak Sepusat.

Ciri-ciri atau kondisi lingkaran 2 berada dalam lingkaran 1 tetapi tidak sepusat ini adalah  $PQ < r < R$  atau bisa ditulis lebih sederhana  $PQ < R-r$ . Jenis kondisi lingkaran ini dinamakan juga dengan tidak konsentris (konsentris= concentric= con: sama; centric: pusat).

### 3. Lingkaran yang Bersinggungan Dalam

Syarat lingkaran bersinggungan dalam adalah  $PQ = R-r$ .

### 4. Lingkaran Berpotongan di Dua Titik

Syarat dua lingkaran yang berpotongan ini adalah  $R - r < PQ < R + r$

### 5. Lingkaran Bersinggungan Luar

Syarat atau ciri-ciri lingkaran yang bersinggungan luar adalah:  $PQ = R+r$ .

### 6. Lingkaran Saling Lepas

Kondisi ini adalah dimana antara 2 lingkaran tidak berpotongan ataupun bersinggungan. Syarat atau ciri-ciri lingkaran yang saling lepas ini  $PQ > R+r$ .

Langkah penyelesaian soal-soal tentang kedudukan dua lingkaran ini:

1. Hitung jari jari dan tentukan titik pusat
2. Hitung jarak antara dua pusat
3. Sesuaikan dengan 6 kondisi di atas

### 1. Menentukan keliling irisan dua lingkaran

a) Untuk menentukan keliling irisannya, kita harus menentukan panjang kedua busurnya, yaitu:

- 1). Busur 1 pada lingkaran pertama (L1):

$$\text{busur 1} = \frac{\angle \text{AOD}}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot r$$

- 2). Busur 2 pada lingkaran kedua (L2):

$$\text{busur 2} = \frac{\angle \text{COB}}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot r$$

- 3). Sehingga keliling irisannya:

Keliling irisan = busur 1 + busur 2.

$$\text{Keliling irisan} = \frac{\angle CAD}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot r + \frac{\angle CBD}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot r$$

## 2. Menentukan besar sudut

Untuk menentukan besarnya sudut masing-masing busur, kita menggunakan aturan kosinus.

Misalkan besar sudut CAD pada busur pertama, besar sudutnya:

$$\begin{aligned}\cos \angle CAD &= \frac{AD^2 + AC^2 - CD^2}{2 \cdot AD \cdot AC} \\ &= \frac{r^2 + r^2 - CD^2}{2 \cdot r \cdot r} \\ \cos \angle CAD &= \frac{2r^2 - CD^2}{2r^2}\end{aligned}$$

## 3. Menentukan panjang garis CD

Sebelum menentukan jarak atau panjang CD, kita harus menentukan titik C dan D (titik potong kedua lingkaran) terlebih dahulu. Untuk menentukan panjang CD, kita gunakan konsep jarak antar dua titik, misalkan titik C(x<sub>1</sub>,y<sub>1</sub>) dan D(x<sub>2</sub>,y<sub>2</sub>), jarak atau panjang CD adalah:

$$CD = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

### Catatan:

Langkah-langkah umum dalam menentukan keliling irisan lingkaran:

- Menentukan titik potong kedua lingkaran,
- Menentukan panjang CD,
- Menentukan sudut kedua busur lingkaran,
- Menentukan panjang busur kedua lingkaran,
- Jumlahkan kedua panjang busurnya.

Untuk menentukan luas irisannya, kita harus menentukan luas kedua temberengnya. Luas tembereng diperoleh dari luas juring kurangi luas segitiganya.

- 1). Tembereng 1 pada lingkaran pertama (L<sub>1</sub>):

$$\text{Luas juring 1} = \frac{\angle CAD}{360^\circ} \cdot \pi \cdot r_1^2$$

$$\text{Luas segitiga CAD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AD \cdot \sin \angle CAD$$

Tembereng 1 = luas juring 1 -- luas segitiga CAD.

- 2). Tembereng 1 pada lingkaran pertama (L<sub>1</sub>):

$$\text{Luas juring 2} = \frac{\angle CBD}{360^\circ} \cdot \pi \cdot r_2^2$$

$$\text{Luas segitiga CBD} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot BD \cdot \sin \angle CBD = \frac{1}{2} \cdot r_2^2 \cdot \sin \angle CBD$$

Tembereng 2 = luas juring 2 -- luas segitiga CBD.

- 3). Sehingga luas irisannya:

**Luas irisan = tembereng 1 + tembereng 2.**

## E. Saran Referensi

Untuk menambah wawasan dalam pemahaman terkait modul ini yang meliputi materi kedudukan dua lingkaran, keliling dan luas lingkaran, maka diharapkan peserta didik mencari sumber atau referensi lain selain modul ini. Saran referensi tersebut yakni judul buku: "Ensiklopedia Matematika Terapan", karya Sue Thomshon dan Ian Fortster, dengan judul tema terjemahan:

- Matematika dalam Masyarakat
- Matematika dalam Lingkungan
- Matematika dalam Rancang Bangun
- Matematika dalam Sains
- Matematika dalam Teknologi



## F. Soal Latihan

Berilah tanda silang (X) pada jawaban yang paling benar!

- Lingkaran  $x^2 + y^2 = 5$  sepusat dengan ...
  - $x^2 + y^2 = 4$
  - $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 5$
  - $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 4$
  - $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$
  - $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 4$
- Lingkaran yang berpotongan dengan lingkaran  $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$  adalah ...
  - $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 14 = 0$
  - $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 12 = 0$
  - $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$
  - $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 11 = 0$
  - $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 12 = 0$
- Lingkaran yang berpotongan dengan lingkaran  $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$  adalah ...
  - $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 14 = 0$
  - $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 9 = 0$
  - $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$
  - $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 11 = 0$
  - $x^2 + y^2 + 12x - 6y - 41 = 0$
- Lingkaran yang bersinggungan dengan lingkaran  $x^2 + y^2 = 9$  adalah ...
  - $x^2 + y^2 = 4$
  - $x^2 + (y+7)^2 = 4$
  - $x^2 + (y+7)^2 = 16$
  - $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 5$
  - $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 7$
- Luas irisan dua lingkaran  $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$  dan  $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 7$  adalah...
  - 11,09
  - 12,05
  - 10,6
  - 15,98
  - 4
- Agar lingkaran  $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 1 = 0$  bersinggungan dengan lingkaran  $x^2 + y^2 - 20x - 8y - k = 0$ , maka nilai k harus sama dengan ...
  - 67
  - 49
  - 47
  - 49
  - 67
- Hubungan dua lingkaran  $x^2 + y^2 = 16$  dan  $x^2 - y^2 = 24$  adalah ...
  - Berpotongan
  - Sepusat
  - Bersinggungan di dalam
  - Bersinggungan di luar
  - Saling lepas
- Keliling irisan lingkaran  $x^2 + y^2 = 36$  dan  $(x-6)^2 + y^2 = 36$  adalah ...
  - 5,33
  - 5,48
  - 65,37
  - 10,81
  - 25,14
- Hubungan dua lingkaran  $x^2 + y^2 + 10x - 2y + 17 = 0$  dengan  $x^2 + y^2 - 8x + 22y - 7 = 0$  adalah...
  - Bersinggungan di dalam
  - Saling lepas
  - Konsentris
  - Bersinggungan di luar
  - Berpotongan
- Agar lingkaran  $x^2 + y^2 - 12x + 8y + 7 = 0$  saling berpotongan dengan lingkaran  $x^2 + y^2 - 2x - 16y - k = 0$  maka nilai k haruslah ...
  - $k > 1$
  - $k > 0$
  - $k > -1$
  - $k < 1$
  - $k < -1$

## G. Kriteria Pindah Modul

Setelah seluruh materi dan setiap kompetensi dasar dipelajari dengan seksama maka cobalah untuk mengerjakan latihan soal yang disediakan, baik secara individu, kelompok maupun dengan bimbingan tutor. Semakin rajin peserta didik dalam mengerjakan soal penugasan, diharapkan semakin terampil dan cepat mengeneralisasikan setiap permasalahan baik yang disediakan dalam modul ataupun dalam kaitannya dengan permasalahan sehari-hari.

Pada tahap berikutnya, kerjakan soal-soal latihan untuk mengukur penguasaan materi yang diperoleh dengan menggunakan rumus di bawah ini.

$$\text{Skor penilaian} = \frac{\text{Jumlah jawaban benar}}{\text{Jumlah soal}} \times 100\%$$

Keterangan :

| Skor Penilaian | Tingkat Penguasaan |
|----------------|--------------------|
| 90% - 100%     | Sangat baik        |
| 80% - 89%      | Baik               |
| 70% - 79%      | Cukup              |
| 60% - 69%      | Kurang             |

Jika peserta didik mampu mencapai skor penilaian 80% atau lebih (tingkat penguasaan “baik” atau “sangat baik”) maka dapat melanjutkan ke Standar Kompetensi/modul berikutnya, tetapi jika penilaian kurang dari 80% dianjurkan untuk mengulang kembali Standar Kompetensi tersebut, terutama pada bagian yang belum dikuasai. Diskusikan dengan teman atau dengan bimbingan tutor.

## H. Kunci Jawaban dan Pembahasan

### PENUGASAN SUBTEMA 1

1. L1 :  $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 17 = 0$

- P : (5, -1)
- Jari-jari R1 = 3

L2 :  $x^2 + y^2 + 8x - 22y - 7 = 0$

- P : (-4, 11)
- Jari-jari R2 = 12

Jarak pusat 2 lingkaran P1P2 =  $\sqrt{(-4 - 5)^2 + (11 - (-1))^2} = \sqrt{225} = 15$

Karena R1 + R2 = Jarak P1P2

$$3 + 12 = 15$$

Maka dua lingkaran tersebut bersinggungan di luar lingkaran

2. L1 :  $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 1 = 0$

- P : (4, -3)
  - Jari-jari R1 =  $\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$
- L2 :  $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 7 = 0$

- P : (-2, -1)
- Jari-jari R2 =  $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

Jarak pusat 2 lingkaran P1P2 =  $\sqrt{(-(-2) - 4)^2 + ((-1) - (-3))^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Karena memenuhi sifat  $R - r < P_1P_2 < R + r$

Maka dua lingkaran tersebut berpotongan di dua titik

### PENUGASAN SUBTEMA 2

1. Keliling dua lingkaran  $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$  dan  $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 8$

$r_1 = 2$  dan  $r_2 = 2\sqrt{2}$

- Nilai x = 2 dan y =  $2 \pm \sqrt{3}$
- Titik Potong M (2,  $2 - \sqrt{3}$ ) dan (2,  $2 + \sqrt{3}$ )

Panjang MN =  $\sqrt{(2 - 2)^2 + ((2 - \sqrt{3}) - (2 + \sqrt{3}))^2} = 2\sqrt{3}$

$\cos \angle MAN = \frac{2r_1^2 - MN^2}{2r_1^2} = \frac{2 \cdot 2^2 - (2\sqrt{3})^2}{2 \cdot 2^2} = \frac{8 - 12}{8} = -\frac{1}{2}$

$\angle MAN = \arccos(-\frac{1}{2}) = 120^\circ$

$\cos \angle MBN = \frac{2r_2^2 - MN^2}{2r_2^2} = \frac{2 \cdot (2\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{3})^2}{2 \cdot (2\sqrt{2})^2} = \frac{16 - 12}{16} = -\frac{1}{4}$

$\angle MBN = \arccos(-\frac{1}{4}) = 104,5^\circ$

panjang MN =  $\frac{\angle MAN}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot r_1 = \frac{120}{360} \cdot 2 \cdot \frac{22}{7} \cdot 2 = 4,19$

Panjang MN =  $\frac{\angle MBN}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot r_2 = \frac{104,5}{360} \cdot 2 \cdot \frac{22}{7} \cdot 2\sqrt{3} = 6,30$

Keliling = busur 1 + busur 2 = 4,19 + 6,30 = 10,49

2. Luas irisan dua lingkaran  $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$  dan  $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 8$
- $r_1 = 2$  dan  $r_2 = 2\sqrt{2}$
  - Juring AMN =  $\frac{\angle MAN}{360^\circ} \cdot \pi \cdot r_1^2 = \frac{120}{360} \cdot \frac{22}{7} \cdot 2^2 = 4,19$
  - Luas segitiga AMN =  $\frac{1}{2} \cdot AM \cdot AN \cdot \sin \angle MAN = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sin 120^\circ = 0,86$
  - Tembereng 1 = juring AMN – Segitiga AMN =  $4,19 - 0,86 = 3,33$
  - Juring MBN =  $\frac{\angle MBN}{360^\circ} \cdot \pi \cdot r_2^2 = \frac{104,5^\circ}{360^\circ} \cdot \frac{22}{7} \cdot (2\sqrt{2})^2 = 0,29 \cdot \frac{22}{7} \cdot 8 = 7,29$
  - Luas segitiga MBN =  $\frac{1}{2} \cdot AM \cdot AN \cdot \sin \angle MBN = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sin 104,5^\circ = 2 \cdot 0,97 = 1,94$
  - Tembereng 2 = Juring MBN – Segitiga MBN =  $7,29 - 1,94 = 5,35$
  - Luas irisan dua = tembereng 1 + tembereng 2 =  $3,33 + 5,35 = 8,68$

### SOAL LATIHAN

- |      |       |
|------|-------|
| 1. A | 6. B  |
| 2. E | 7. B  |
| 3. A | 8. E  |
| 4. C | 9. D  |
| 5. E | 10. C |

### I. Penilaian (Rubrik/Kriteria Penilaian)

#### PENUGASAN SUBTEMA 1

| PENILAIAN                                       | SKOR |
|-------------------------------------------------|------|
| Menjawab benar dengan sempurna sampai langkah 5 | 100  |
| Menjawab benar dengan sempurna sampai langkah 4 | 80   |
| Menjawab benar dengan sempurna sampai langkah 3 | 60   |
| Menjawab benar dengan sempurna sampai langkah 2 | 40   |
| Menjawab benar dengan sempurna sampai langkah 1 | 20   |
| Menjawab salah                                  | 0    |

#### PENUGASAN SUBTEMA 2

- terdapat 10 langkah  
NILAI = JUMLAH JAWABAN BENAR X 10
- terdapat 8 langkah  
NILAI = JUMLAH JAWABAN BENAR X 12,5

### DAFTAR PUSTAKA

[https://cdn.pixabay.com/photo/2013/07/13/10/22/mountain-bike-157085\\_960\\_720.png](https://cdn.pixabay.com/photo/2013/07/13/10/22/mountain-bike-157085_960_720.png)

<https://i0.wp.com/kaaffah.xyz/wp-content/uploads/2016/01/roda.gif>

<https://jiri14021994.wordpress.com>

[www.madematika.net](http://www.madematika.net)

<http://www.marthamatika.com/2018/02/>

<https://matematika15.files.wordpress.com/2017/03/kelas-xi-wajib-irisan-dua-lingkaran-2-l-a-s.pdf> (King's Learning, be smart without limits)

<http://www.marthamatika.com/2017/12/cara-menentukan-kedudukan-posisi-2-lingkaran.html>

<http://racheloktaalida11ipa7.blogspot.co.id/2015/12/irisan-2-lingkaran.html>

<https://simpustaka.pakpakhbaratkab.go.id/publik/buku?id=5bce8b771442b>

[https://simpustaka.pakpakhbaratkab.go.id/assets/cover/2849-20180816\\_091111.jpg](https://simpustaka.pakpakhbaratkab.go.id/assets/cover/2849-20180816_091111.jpg)

[https://simpustaka.pakpakhbaratkab.go.id/assets/cover/2849-20180816\\_091111.jpg](https://simpustaka.pakpakhbaratkab.go.id/assets/cover/2849-20180816_091111.jpg)

[https://s2.bukalapak.com/img/7838057462/w-1000/P\\_20180513\\_142750\\_vHDR\\_On.jpg](https://s2.bukalapak.com/img/7838057462/w-1000/P_20180513_142750_vHDR_On.jpg)

## PROFIL PENULIS

**Nama Lengkap** : Tasimin, S.Pd, M.Pd.

**Telp Kantor/HP** : 085 227 810 607

**E-Mail** : [bapaktasimin234@gmail.com](mailto:bapaktasimin234@gmail.com)

**Akun Facebook** : ---

**Alamat Kantor** : PKBM GIRIWANGI CIPARI CILACAP

Jl. Giriwangi No. 31 Cipari Kec. Cipari Kab. Cilacap

Propinsi Jawa Tengah



**Bidang Keahlian:** Pendidikan Matematika

### **Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir**

1. Tutor Kesetaraan di PKBM GIRIWANGI CIPARI Kab. Cilacap
2. Guru di SMP NU Cipari Kab. Cilacap

### **Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar**

1. D II UPBJ UT Purwokerto Jurusan Pendidikan Olahraga tahun 2005
2. FKIP Universitas Widya Dharma Klaten jurusan Pendidikan Matematika tahun 2011.
3. Pasca Sarjana Universitas Galuh Jurusan Manajemen Pendidikan tahun 2016